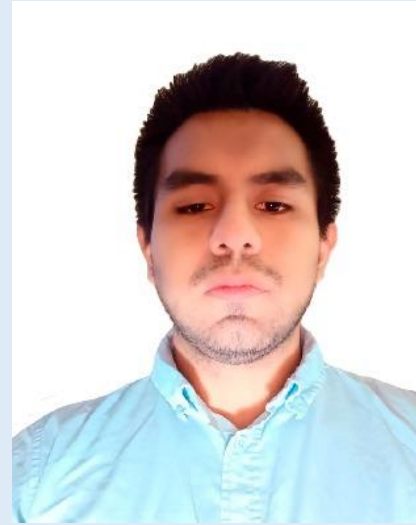




Profesor:
Ricardo Espino Lizama



ÁLGEBRA

GRUPO PITÁGORAS



01.- Dadas las ecuaciones cuadráticas

$$x^2 + bx + c = 0 \quad \text{y}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

Se tiene que las raíces de la primera ecuación son la suma y el producto de las raíces de la segunda ecuación, y las raíces de la segunda ecuación son la suma y el producto de las raíces de la primera ecuación. Determinar el valor de $E = bq + cp$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) -2 E) 4

El polinomio $x^2 + bx + c$ tiene como raíces: $-p$ y q

$$-p + q = -b \quad -pq = c$$

El polinomio $x^2 + px + q$ tiene como raíces: $-b$ y c

$$-b + c = -p \quad -bc = q$$

$$\begin{aligned} q &= p - b \\ p - b &= -c \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \mathbf{q = -c}$$

$$-p(-c) = c \quad \text{Si } c \neq 0 \text{ entonces } p = 1$$

$$-bc = (-c) \quad \text{Si } c \neq 0 \text{ entonces } b = 1$$

$$\mathbf{E = bq + cp = 1(-c) + c(1) = 0}$$

Si $c = 0$ entonces 0 sería una raíz de $x^2 + px + q$, por lo tanto $q = 0$

$$\mathbf{E = bq + cp = b(0) + 0(p) = 0}$$

03.- Dada la ecuación: $x^2 + 4x + 1 = 0$ cuyas

raíces son x_1 y x_2 ; calcule:

$$\frac{1}{(x_1 + 4)^5} + \frac{1}{(x_2 + 4)^5}$$

A) 128

B) 256

C) 1024

D) 854

E) 724

$$x_1 + x_2 = -4 \quad y \quad x_1 x_2 = 1$$

$$x_1 + 4 = -x_2$$

$$\frac{1}{x_1 + 4} = -\frac{1}{x_2}$$

$$\frac{1}{x_1 + 4} = -\frac{x_1 x_2}{x_2}$$

$$\frac{1}{x_1 + 4} = -x_1$$

$$\left(\frac{1}{x_1 + 4}\right)^5 = -x_1^5$$

$$\begin{aligned} \text{Piden: } & \frac{1}{(x_1 + 4)^5} + \frac{1}{(x_2 + 4)^5} \\ & = -(x_1^5 + x_2^5) \end{aligned}$$

$$P(x) = x^2 + 4x + 1$$

$$P'(x) = 2x + 4$$

1	2	4						
-4		-8	-2					
		16	4					
-1			-56	-14				
				208	52			
					-776	-194		
	2	-4	14	-52	194	-724		
					$x_1^4 + x_2^4$	$x_1^5 + x_2^5$		

$$\therefore -(x_1^5 + x_2^5) = 724$$

05.- Con respecto a la ecuación:

$$x^7 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

Indicar el valor de verdad de:

I. La ecuación tiene 3 raíces y 4 imaginarias.

II. La ecuación tiene 2 raíces reales y 5 raíces imaginarias.

III. La ecuación tiene 1 raíz real y 6 raíces imaginarias.

- A) VVV B) FFF C) VFV
D) VFF E) VVF

$x^7 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$									
1	1	0	-2	3	0	-3	3	-1	
1		1	-1						
			1	-1					
-1				-2	2				
					0	0			
						2	-2		
							-1	1	
	1	1	-2	0	2	-1	0	0	

$$x^7 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x - 1 = (x^2 - x + 1)(x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x - 1)$$

$$x^7 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x - 1 = (x^2 - x + 1)(x^5 + x^4 - x^3 - x^3 - x^2 + x + x^2 + x - 1)$$

$$x^7 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x - 1 = (x^2 - x + 1)(x^3(x^2 + x - 1) - x(x^2 + x - 1) + x^2 + x - 1)$$

$$x^7 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x - 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)(x^3 - x + 1)$$

2 imaginarias 2 reales 1 real y 2 imaginarias

Rpta. – VFF

07.- Si: a, b y c son raíces de la ecuación cúbica:

$$x^3 - px^2 + q = 0$$

halle la ecuación cuyas raíces sean: $\frac{b+c}{a}$; $\frac{c+a}{b}$ y

$$\frac{a+b}{c}$$

A) $qx^3 + 3qx^2 + (p^3 - 3q)x + q = 0$

B) $qx^3 + 3qx^2 + (3q - p^3)x + q = 0$

C) $qx^3 + (p^2 - 3q)x + q = 0$

D) $qx^3 + 3qx^2 + q = 0$

E) $qx^3 + (3q - p^2)x + q = 0$

Ecuación: $x^3 - px^2 + q = 0$

Raíces: a, b y c

Ecuación: $????? = 0$

Raíces: $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}$ y $\frac{a+b}{c}$

En la primera ecuación: $a + b + c = p$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{p-a}{a} = \frac{p}{a} - 1$$

$$\frac{c+a}{b} = \frac{p-b}{b} = \frac{p}{b} - 1$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{p-c}{c} = \frac{p}{c} - 1$$

Transformación $y = \frac{p}{x} - 1$

Transformación $y = \frac{p}{x} - 1$

$$xy = p - x$$

$$xy + x = p$$

$$x = \frac{p}{y + 1}$$

07.- Si: a, b y c son raíces de la ecuación cúbica:

$$x^3 - px^2 + q = 0$$

halle la ecuación cuyas raíces sean: $\frac{b+c}{a}$; $\frac{c+a}{b}$ y

$$\frac{a+b}{c}$$

A) $qx^3 + 3qx^2 + (p^3 - 3q)x + q = 0$

B) $qx^3 + 3qx^2 + (3q - p^3)x + q = 0$

C) $qx^3 + (p^2 - 3q)x + q = 0$

D) $qx^3 + 3qx^2 + q = 0$

E) $qx^3 + (3q - p^2)x + q = 0$

$$x^3 - px^2 + q = 0$$

$$\left(\frac{p}{y+1}\right)^3 - p\left(\frac{p}{y+1}\right)^2 + q = 0$$

$$p^3 - p^3(y+1) + q(y+1)^3 = 0$$

$$p^3 - p^3(y+1) + q(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) = 0$$

$$qy^3 + 3qy^2 + (3q - p^3)y + q = 0$$

$$qx^3 + 3qx^2 + (3q - p^3)x + q = 0$$

09. Si $\langle -\infty; a+2 \rangle \cup \langle b-1; +\infty \rangle$ es el conjunto solución de la inecuación $1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + x^{-5} \geq 0$, determine el valor de $a^2 + b^2$.

- A) 8 B) 13 C) 1
D) 2 E) 10

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \geq 0$$

$$a = \frac{1}{x}$$

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 \geq 0$$

$$1 + a + a^2 + a^3(1 + a + a^2) \geq 0$$

$$(1 + a^3)(1 + a + a^2) \geq 0$$

$$(1 + a)(a^2 - a + 1)(1 + a + a^2) \geq 0$$

$$\text{de donde } a + 1 \geq 0$$

$$\text{osea } a \geq -1$$

$$\frac{1}{x} \geq -1$$

$$\text{entonces } -1 \leq \frac{1}{x} < 0 \quad \text{o} \quad \frac{1}{x} > 0$$

$$\text{entonces } x \leq -1 \quad \text{o} \quad x > 0$$

$$C.S. =] - \infty; -1] \cup]0; +\infty[$$

$$a = -3 \quad b = 1$$

12.- Si $\forall x \in S : \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \geq 6$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $S \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$

II. $1,5 \in S$

III. $S \subset [1;2)$

A) VVV

B) VFV

C) FFV

D) FFF

E) FVV

Restricción: $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$ de donde $x \in]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$

$$\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = a$$

$$a + a^2 \geq 6$$

$$a^2 + a - 6 \geq 0$$

$$(a+3)(a-2) \geq 0$$

pero $a+3 > 0$ entonces $a-2 \geq 0$

$$a \geq 2$$

$$\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \geq 2$$

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 16$$

$$\frac{15x-17}{x-1} \leq 0$$

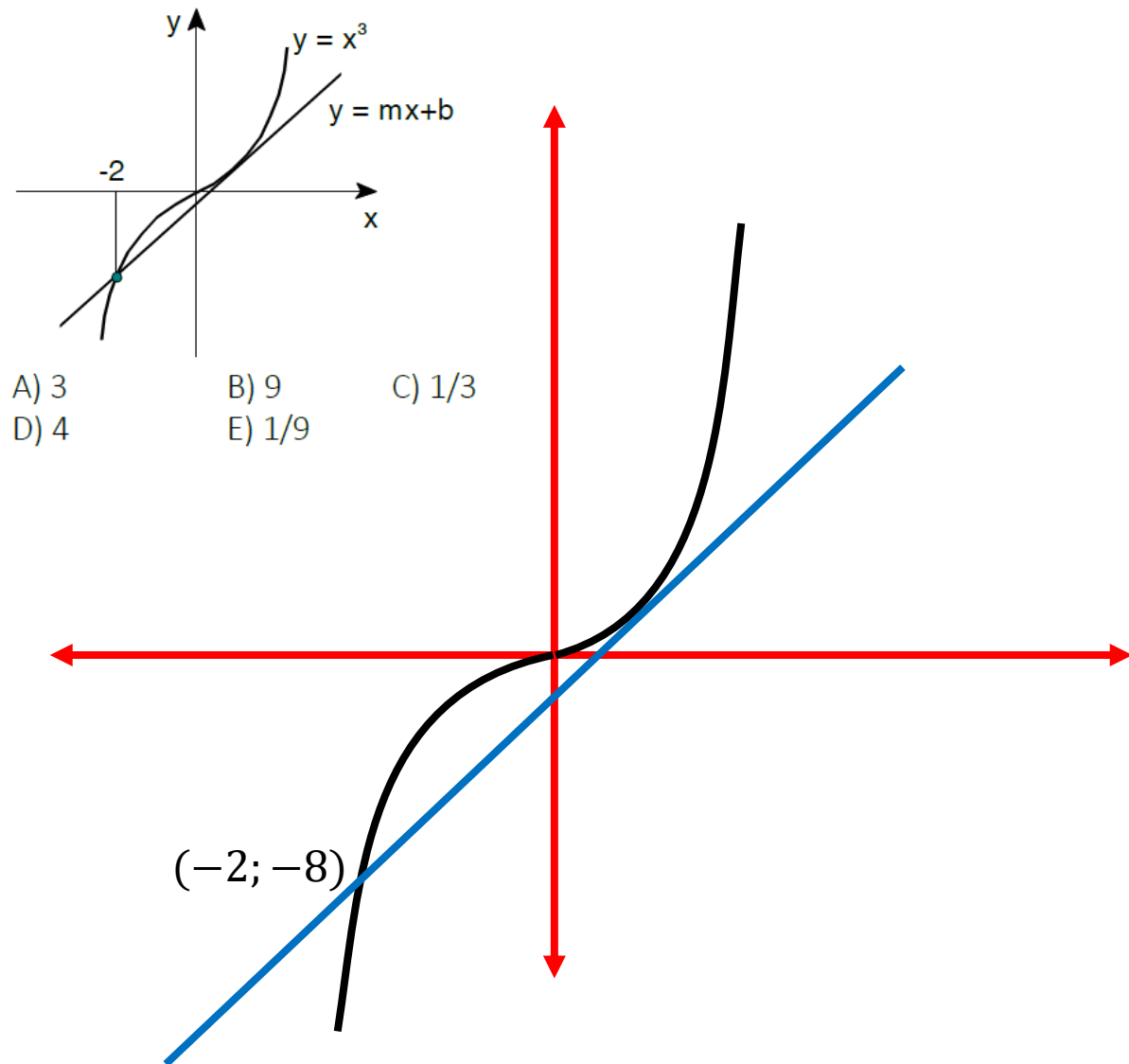
$$C.S. =]1; \frac{17}{15}]$$

I. — $S \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ FALSO

II. — Falso

III. — Verdadero

13.- Determinar: m^b , teniendo en cuenta la siguiente gráfica:



Para hallar los puntos de intersección

$$mx + b = x^3$$

$$0 = x^3 - mx - b$$

$$x^3 - mx - b = (x + 2)(x - a)^2$$

$$x^3 - mx - b = (x + 2)(x^2 - 2ax + a^2)$$

$$x^3 - mx - b = x^3 + (2 - 2a)x^2 + (a^2 - 4a)x + 2a^2$$

$$a = 1$$

$$x^3 - mx - b = x^3 - 3x + 2$$

$$m = 3 \quad b = -2 \quad \text{Rpta: } \frac{1}{9}$$

15. Indique el número de proposiciones correctas respecto al polinomio

$$P(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7$$

- I. Tiene una raíz positiva
- II. Tiene como máximo dos raíces negativas
- III. Tiene una raíz en $[1, 2]$
- IV. No tiene raíces en $[100, +\infty)$

- A) 0 B) 1 C) 2
- D) 3 E) 4

Aplicar la Regla de signos de Descartes

$$P(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 7$$

$$\# \text{Variaciones de signo} = 1$$

por lo tanto solo existe 1 raíz real positiva.

$$P(-x) = -3x^5 + 2x^4 + x^3 - 8x^2 - 7$$

$$\# \text{Variaciones de signo} = 2$$

por lo tanto puede haber 2 raíces negativas o 0 negativas

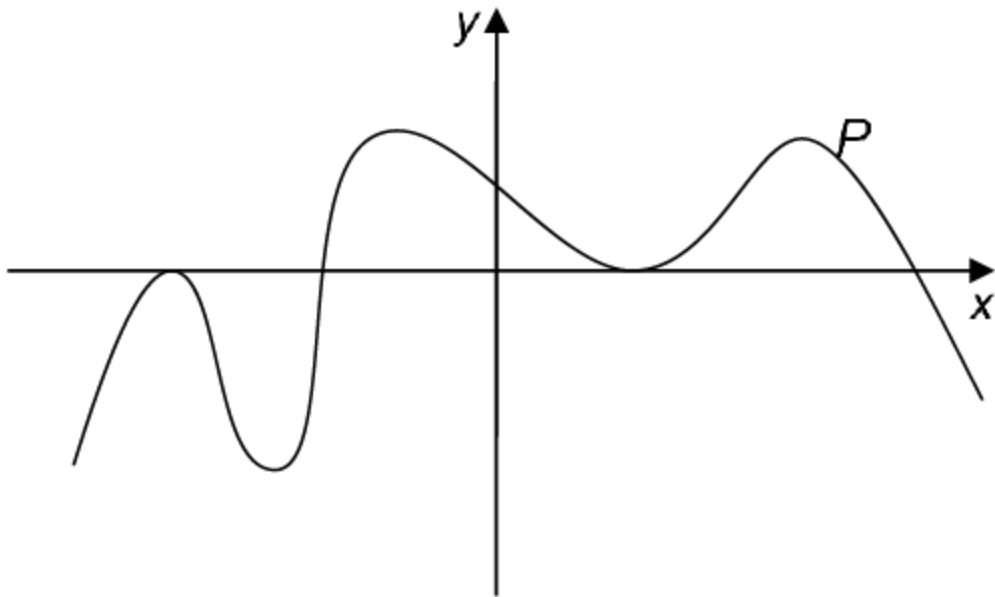
$$P(1) = -11 \quad P(2) = 81 \quad \text{entonces } P(1) \cdot P(2) < 0$$

según el Teorema de Bolzano entonces existe una raíz en $]1; 2[$

la cual sería la ÚNICA raíz real positiva

Rpta. – VVVV

16. Si la gráfica de la función polinomial $P(x)$ es la siguiente, indique verdadero (V) o falso (F):



- I. $P(x)$ es de sexto grado.
 - II. El término independiente de $P(x)$ es positivo.
 - III. El coeficiente principal de $P(x)$ es positivo.
- A) VVV B) VFV C) VVF

**Por la forma de la gráfica, el polinomio deber ser de grado par
Y además posee coeficiente principal negativo**

Tiene dos raíces de multiplicidad PAR

Tiene dos raíces de multiplicidad IMPAR

$$P(x) = a_0(x - x_1)^{2k}(x - x_2)^{2n+1}(x - x_3)^{2m}(x - x_4)^{2p+1}$$

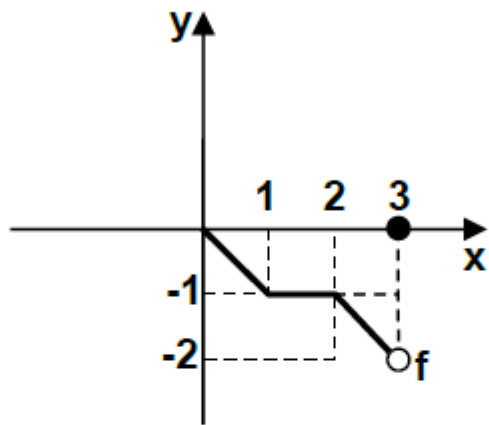
donde $a_0 < 0$ y además $m, n, p, k \in \mathbb{N}$

I. –FALSO

II. –Verdadero ya que la intersección con el eje Y está en el semieje Y positivo

III. –FALSO

21. En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función f



Si $H(x) = 2 - |f(x-1)|$, entonces indique los valores de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $\text{Ran} H = [0; 2]$

II. $\text{Dom} H = [2; 4]$

III. $-H$ es una función no decreciente.

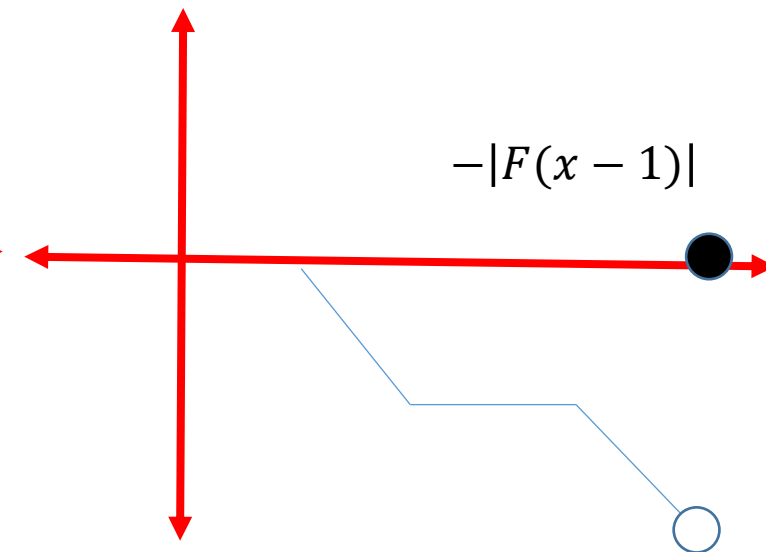
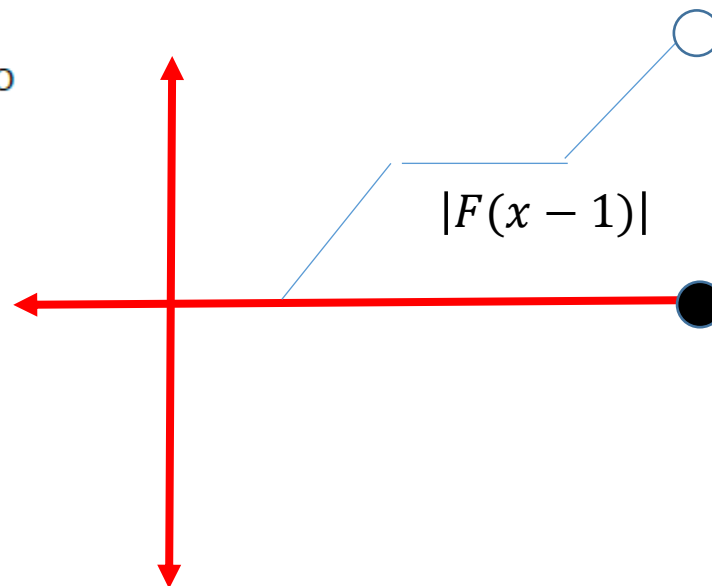
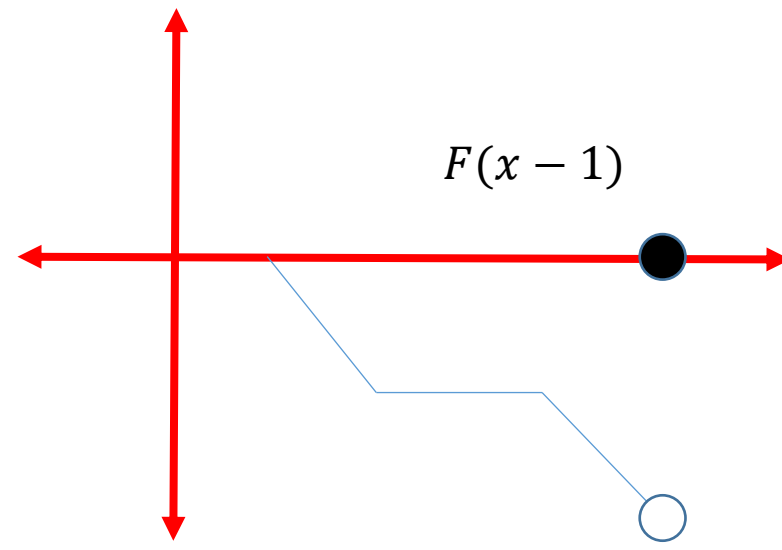
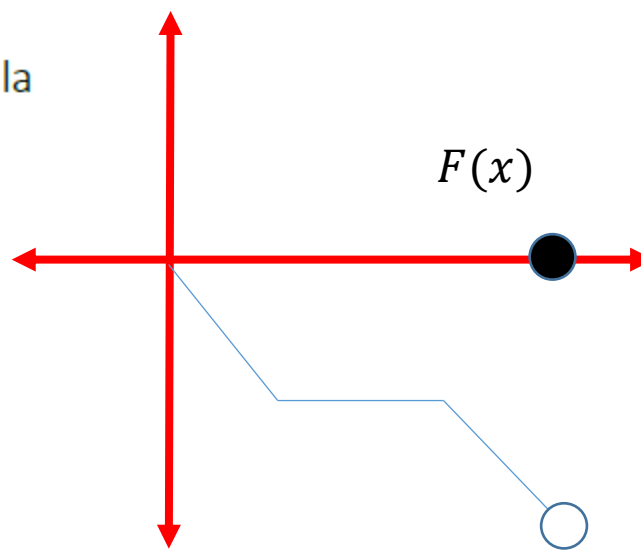
A) VVV

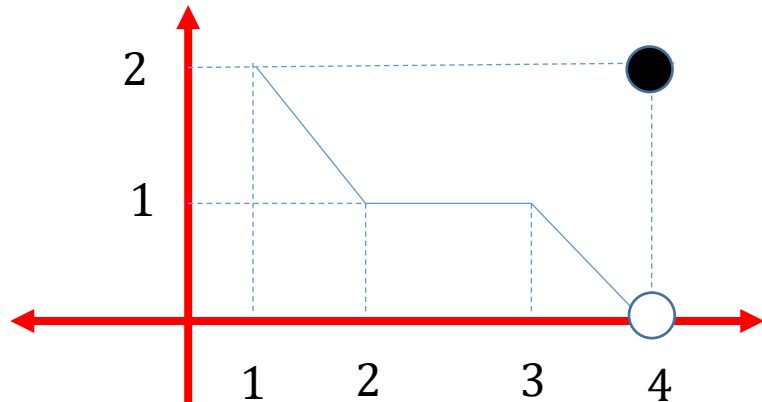
B) VVF

C) FFV

D) FFF

E) VFV

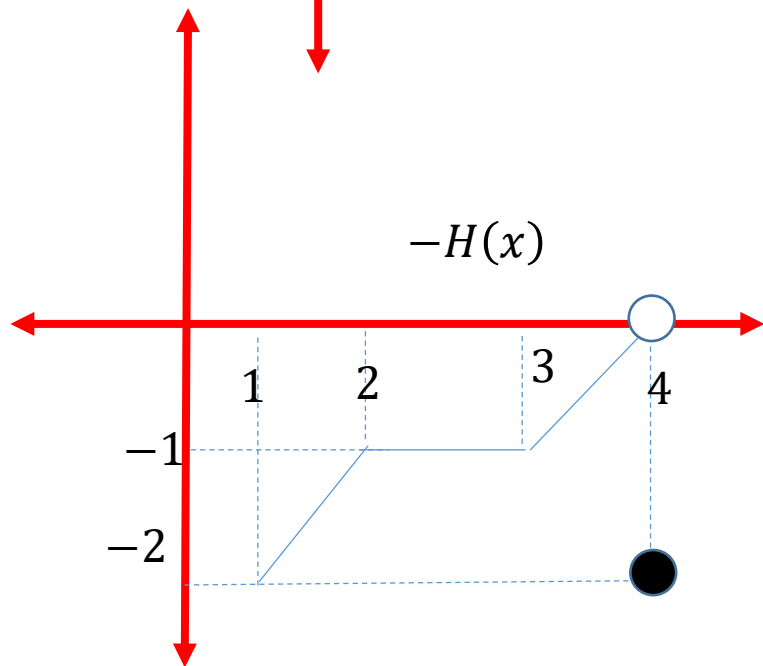




$$H(x) = 2 - |F(x - 1)|$$

$$D_H = [1; 4]$$

$$R_H =]0; 2]$$

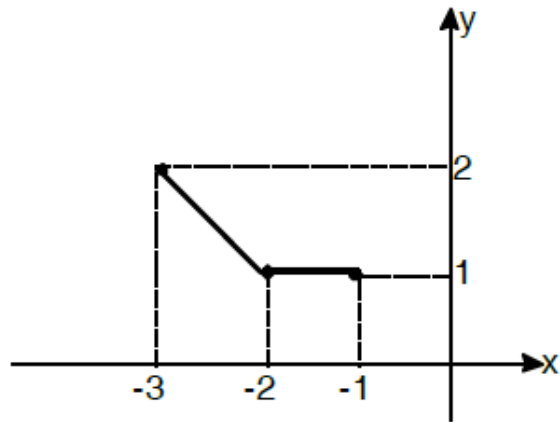


I. – *FALSO*

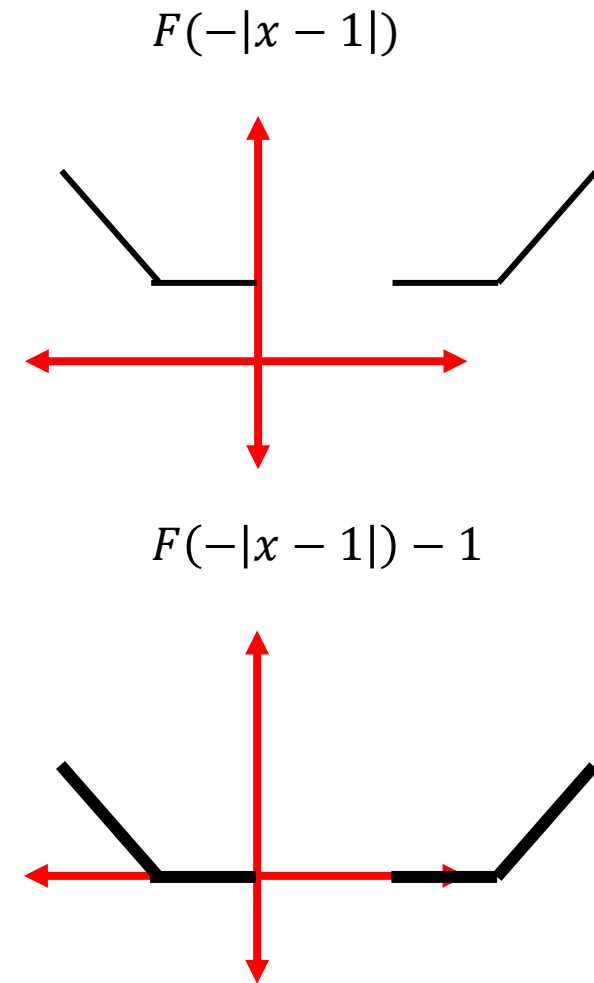
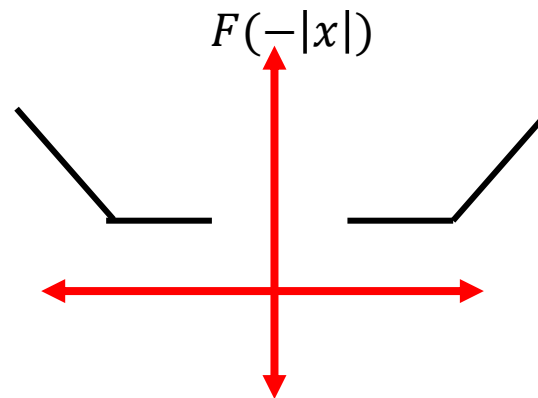
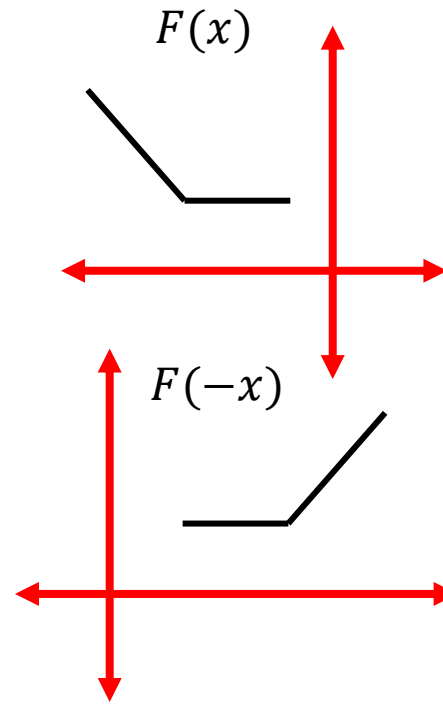
II. – *FALSO*

III. – *– H es no decreciente: FALSO*

22. En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función $y = F(x)$.



Entonces la figura que mejor representa la gráfica de $F(-|x - 1|) - 1$ es:



CLAVE C

24.- Determinar el valor de convergencia de:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 5}} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{4}{5}} + \dots + \sqrt{\frac{n+2}{n+3}} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{2}$

C) 1

E) 2

E) 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 5}} \left(\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{\frac{5}{6}} + \dots + \sqrt{\frac{n+2}{n+3}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + 5}} \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{\frac{5}{6}} + \dots + \sqrt{\frac{n+2}{n+3}} \right)}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + 5}} \frac{(c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n)}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + 5}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n)}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{4n^2}{n^2} + \frac{5}{n^2}}} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{5}{n^2}}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n+2}{n+3}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

26.- En las siguientes afirmaciones determine cuales son verdaderas o falsas.

I.- $\left\{\frac{n^2+1}{n+2}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada.

II.- La sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2\sqrt{a_n}}$ es acotada.

III.- La sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

Es acotada.

A) VVV

B) FVV

C) VFV

D) VVF

E) FFF

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

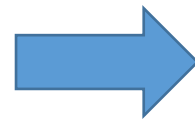
$$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+3} < \frac{1}{n}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$$

+



$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} < 1$$

$\rightarrow 0 < a_n < 1$ osea es ACOTADA

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \text{ CONVERGE a } \ln 2$$

I. – Falso, ya que la sucesión puede ser tan grande como uno desee

$$II. - a_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \quad a_{n+1} = \sqrt{2\sqrt{a_n}}$$

$$a_2 = \sqrt{2\sqrt[4]{2}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}$$

$$a_3 = \sqrt{2\sqrt[4]{2}\sqrt[16]{2}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}}$$

$$\text{en general } a_n = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}}}$$

$$\text{pero } \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1$$

entonces $a_n < 2$ además $0 < a_n < 2$ es acotada

$$III. - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

29.- El conjunto

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^n} \text{ converge} \right\} \text{ es igual}$$

a

A) $\mathbb{R}$ B) $\langle 0; \infty \rangle$ C) $\left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle$

D) $\left\langle -\infty; \frac{1}{2} \right\rangle$ E) $\left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x} \right)^n \text{ converge} \right\}$$

Teoría $\sum_{n=1}^{\infty} (r)^n$ converge si y solo si $-1 < r < 1$

por lo tanto $-1 < \frac{x}{1-x} < 1$

$$0 < \frac{1}{1-x} < 2$$

$$\frac{1}{2} < 1-x$$

$$x < \frac{1}{2}$$

CLAVE D

30.- En una progresión aritmética a es el primer término, r la razón y S_n , S_{2n} , S_{3n} son las sumas respectivas de los n , $2n$ y $3n$ primeros términos de la progresión. Si $M = S_{3n} - S_{2n} - S_n$, entonces se afirma:

- a. M y r tienen el mismo signo.
 - b. M depende de a y r , solamente.
 - c. M depende de n y r solamente
- ¿Cuál de estas afirmaciones son correctas?
- A) solo I B) solo II C) solo III
D) solo I y III E) solo II y III

$$a_n = a + (n - 1)r$$

$$S_n = \left(\frac{a + a_n}{2} \right) n$$

$$S_{2n} = \left(\frac{a + a_{2n}}{2} \right) (2n)$$

$$S_{3n} = \left(\frac{a + a_{3n}}{2} \right) (3n)$$

$$M = S_{3n} - S_{2n} - S_n$$

$$M = \left(\frac{a + a_{3n}}{2} \right) 3n - \left(\frac{a + a_{2n}}{2} \right) (2n) - \left(\frac{a + a_n}{2} \right) n$$

$$M = \frac{n}{2} (3a_{3n} - 2a_{2n} - a_n)$$

$$M = \frac{n}{2} (3(a + (3n - 1)r) - 2(a + (2n - 1)r) - (a + (n - 1)r))$$

$$M = \frac{n}{2} ((9n - 3)r - (4n - 2)r - (n - 1)r)$$

$$M = \frac{n}{2} (4nr) \qquad M = 2n^2r$$

Solo I y III

33. Se tiene las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = B + C. \text{ Si } B = (b_{ij}) \quad \text{es}$$

una matriz simétrica; $C = (c_{ij})$ es una matriz antisimétrica. Determine el valor de $b_{11} + b_{12} + b_{13}$.

- A) $\frac{5}{2}$ B) 3 C) $\frac{7}{2}$
D) 4 E) $\frac{9}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = B + C$$

B es simétrica y C es antisimétrica

$$B^T = B \quad C^T = -C$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}^t = B^T + C^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B - C$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = B + C$$

Sumando $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$

Rpta: 4

35. Calcule el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

- A) $n!$ B) n^2 C) $2n$
 D) $-2n!$ E) $-2(n-2)!$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow F_1 - F_2$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_3$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_4$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

$$D = -1 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = -1(2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$D = -1(2)(n-2)!$$

$$D = -(2)(n-2)!$$

38.- Si $A_{4 \times 4}$ tal que

$$|A| = 4 \text{ y } H = |4A^{-1}|A^T$$

$$M = |A^T \cdot A|(4A^{-1})^T$$

Calcular: $T = |H \cdot M|$

A) 2^{48} B) 2^{24}

C) 64 D) 2^{12}

E) 2^8

A es una matriz de 4×4 con $|A| = 4$

A^{-1} es una matriz de 4×4 con $|A^{-1}| = \frac{1}{4}$

$$H = |4A^{-1}| \cdot A^t$$

$$H = 4^4 |A^{-1}| \cdot A^t$$

$$H = 4^4 \cdot \frac{1}{4} \cdot A^t$$

$$H = 4^3 \cdot A^t$$

$$M = |A^T \cdot A|(4A^{-1})^T$$

$$M = |A^T| |A| 4 (A^{-1})^T$$

$$M = 4^3 (A^{-1})^T$$

$$T = |HM| = |H| |M| = 4^{12} |A^t| \cdot 4^{12} |(A^{-1})^T|$$

$$= 4^{12} |A| \cdot 4^{12} |A^{-1}|$$

$$= 4^{24} = 2^{48}$$

41.- Resolver el sistema:

$$\begin{aligned}x + xy + xy^2 + xy^3 &= 15 \\x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^6 &= 85\end{aligned}$$

Indicando la suma del mayor valor de "x" con el menor valor de "y"

$$\begin{aligned}x + xy + xy^2 + xy^3 &= 15 \\x(1 + y) + xy^2(1 + y) &= 15\end{aligned}$$

$$x(1 + y)(1 + y^2) = 15$$

$$\begin{aligned}x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^6 &= 85 \\x^2(1 + y^2) + x^2y^4(1 + y^2) &= 85\end{aligned}$$

$$x^2(1 + y^2)(1 + y^4) = 85$$

$$\rightarrow x^2(1 + y)^2(1 + y^2)^2 = 225$$

$$x^2(1 + y^2)(1 + y^4) = 85$$

Dividimos:

$$\frac{(1 + y)^2(1 + y^2)}{(1 + y^4)} = \frac{45}{17}$$

$$\frac{y^4 + 2y^3 + 2y^2 + 2y + 1}{(1 + y^4)} = \frac{45}{17}$$

$$28y^4 - 34y^3 - 34y^2 - 34y + 28 = 0$$

$$14y^4 - 17y^3 - 17y^2 - 17y + 14 = 0$$

$$(2y^2 - 5y + 2)(7y^2 + 9y + 7) = 0$$

$$(2y - 1)(y - 2)(7y^2 + 9y + 7) = 0 \quad y = 2 \quad y = \frac{1}{2}$$

$$y = 2 \text{ entonces } x = 1$$

$$y = \frac{1}{2} \text{ entonces } x = 8$$

$$\text{Rpta: } 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

43.- Si las ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax + by &= 1 \\ cx^2 + dy^2 &= 1 \end{aligned}$$

Tienen solamente una solución, calcular:

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{d}$$

A) 1

B) 3/2

C) 2/3

D) 5/4

E) 4/5

$$ax + by = 1$$

$$cx^2 + dy^2 = 1$$

$$cx^2 + d \left(\frac{1 - ax}{b} \right)^2 = 1$$

$$cx^2 + d \left(\frac{1 - 2ax + a^2x^2}{b^2} \right) = 1$$

$$b^2cx^2 + d(1 - 2ax + a^2x^2) = b^2$$

$$x^2(a^2d + b^2c) - 2adx + d - b^2 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$(-2ad)^2 - 4(a^2d + b^2c)(d - b^2) = 0$$

$$4a^2d^2 - 4(a^2d + b^2c)(d - b^2) = 0$$

$$y = \frac{1 - ax}{b}$$

$$a^2d^2 - (a^2d + b^2c)(d - b^2) = 0$$

$$a^2d^2 - (a^2d^2 + b^2cd - a^2b^2d - b^4c) = 0$$

$$(b^2cd - a^2b^2d - b^4c) = 0$$

$$b^2(cd - a^2d - b^2c) = 0$$

$$cd - a^2d - b^2c = 0$$

$$cd = a^2d + b^2c$$

$$1 = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{d}$$

44.- Considere el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (t^2 + t - 2)x - 4y = 15 \\ 6y + (4t - 3t^2)x = -20 \end{cases}$$

Donde x, y son las incógnitas.

Determine la veracidad o falsedad de las siguientes tres proposiciones:

I.- Para todo $t \in \mathbb{R}$ el sistema es incompatible

II.- Existe algún $t \in \mathbb{R}$ tal que el sistema es compatible indeterminado.

III.- Para todo $t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ el sistema es compatible.

- A) FVV B) VFF C) VFV
D) FFV E) FFF

$$\text{Si } t \neq \frac{2}{3} \wedge t \neq 3$$

entonces $\Delta s \neq 0 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

$$\text{Si } t = 3$$

$$\begin{cases} 10x - 4y = 15 \\ -15x + 6y = -20 \end{cases}$$

$\rightarrow$ El sistema es incompatible

$$\text{Si } t = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} -\frac{8}{9}x - 4y = 15 \\ \frac{4}{3}x + 6y = -20 \end{cases}$$

$\rightarrow$ El sistema es incompatible

$$\Delta s = \begin{vmatrix} t^2 + t - 2 & -4 \\ 4t - 3t^2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta s = 6(t^2 + t - 2) + 4(4t - 3t^2)$$

$$\Delta s = -6t^2 + 22t - 12$$

$$\Delta s = -(6t^2 - 22t + 12)$$

$$\Delta s = -2(3t^2 - 11t + 6)$$

$$\Delta s = -2(3t - 2)(t - 3)$$

Rpta: FFF

45.- Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales en las variables x e y .

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Determine la veracidad o falsedad de las siguientes tres proposiciones:

I.- Si el sistema tiene al menos dos soluciones distintas entonces $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ o $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$

II.- Si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ entonces el sistema es incompatible.

III.- Si $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ son soluciones entonces $((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2; (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)$ es también solución para cada $\lambda \in \mathbb{R}$

- A) FFV B) FVV C) VVV
D) VFV E) FFF

Sumando:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a_1((1 - n)x_1 + nx_2) + b_1((1 - n)y_1 + ny_2) = c_1 \\ a_2((1 - n)x_1 + nx_2) + b_2((1 - n)y_1 + ny_2) = c_2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_1(x_3) + b_1(y_3) = c_1 \\ a_2(x_3) + b_2(y_3) = c_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Es decir, si $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ son soluciones entonces $(x_3; y_3)$ donde $x_3 = (1 - n)x_1 + nx_2$ y $y_3 = (1 - n)y_1 + ny_2$ también será una solución para todo $n \in \mathbb{R}$

I. – FALSO, ya que si el sistema tiene dos soluciones distintas entonces tiene infinitas soluciones distintas y sería S.C.I.

y por lo tanto $\Delta s = 0 \wedge \Delta x = 0 \wedge \Delta y = 0$

II. – FALSO ya que también puede ser S.C.I.

III. – Verdadero

Si x_1, y_1 satisfacen el sistema entonces

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1y_1 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2y_1 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x_1(1 - n) + (1 - n)b_1y_1 = (1 - n)c_1 \\ a_2(1 - n)x_1 + b_2(1 - n)y_1 = (1 - n)c_2 \end{cases}$$

Si x_2, y_2 satisfacen el sistema entonces

$$\begin{cases} a_1x_2 + b_1y_2 = c_1 \\ a_2x_2 + b_2y_2 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1nx_2 + b_1ny_2 = nc_1 \\ a_2nx_2 + b_2ny_2 = nc_2 \end{cases}$$

Si el S.C.D entonces $\Delta s \neq 0$ y viceversa

Si el $\Delta s = 0$ y algún determinante de alguna variable es distinto de cero, entonces S.I.

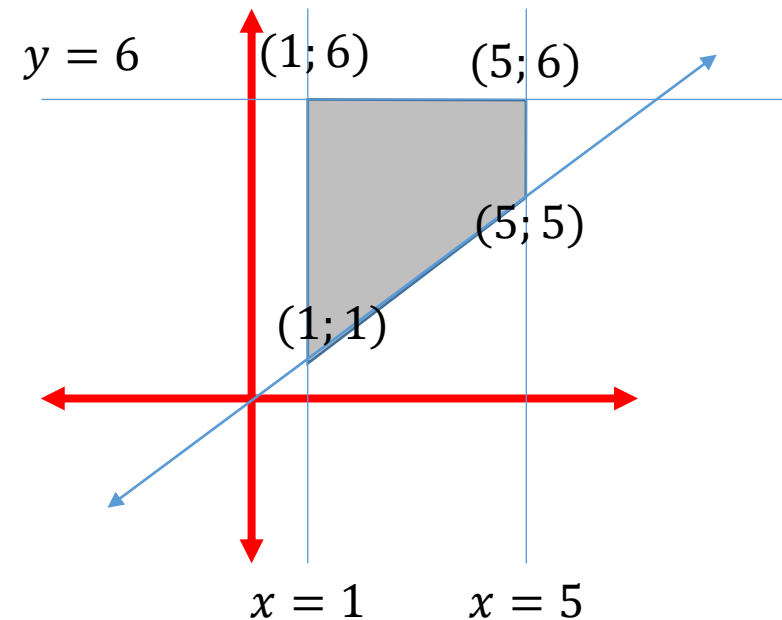
Si el S.C.I. entonces todos los determinantes son cero.

48.- Una compañía fabrica dos productos, grabadoras y amplificadores. Cada grabadora da una ganancia de \$3,00, mientras que cada amplificador da una ganancia de \$7,00. La compañía debe fabricar al menos una grabadora por día para satisfacer a uno de sus clientes, pero no más de 5, a causa de problemas de producción. Asimismo el número de amplificadores producidos no puede exceder los 6 diarios. Como requisito adicional el número de grabadoras no debe exceder al número de amplificadores. ¿Cuántos de cada producto debe fabricar la compañía a fin de obtener la ganancia máxima?

- A) 4; 5 B) 5;6 C) 6;7
D) 6;8 E) 7; 9

Grabadoras: x
Amplificadores: y **Ganancia: $3x + 7y$**

$$\begin{aligned} 1 &\leq x \leq 5 \\ y &\leq 6 \\ x &\leq y \end{aligned}$$



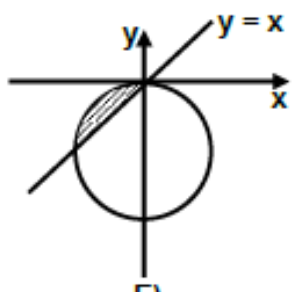
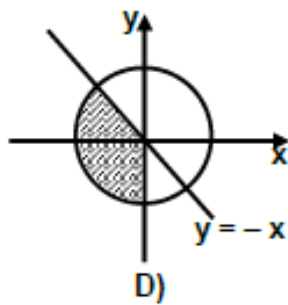
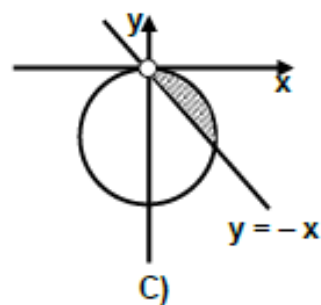
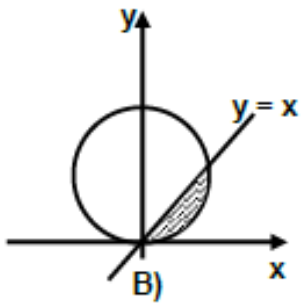
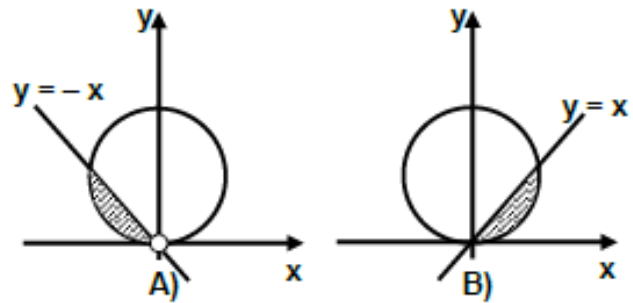
Solución óptima: (5; 6)

Para maximizar la ganancia debe fabricar 5 grabadoras y 6 amplificadores

50.- Sea el siguiente conjunto

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} / 1 \leq \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \right\}$$

¿Cuál de las gráficas corresponde a la región S?



$$S = \left\{ z \in \mathbb{C}: 1 \leq \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \right\}$$

$$z = x + yi \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi} = \frac{(x - yi)}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)i$$

$$1 \leq -\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \leq \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$1 \leq -\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

$$x^2 + y^2 \leq -y$$

$$x^2 + y^2 + y \leq 0$$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$-\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \leq \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$-y \leq x$$

$$0 \leq x + y$$

